

جلسه بهزاد

پنج‌ماه‌سال در آرزوی قضیه شدن



همان‌طور که دبیر ریاضیات گسسته قول داده بود، این جلسه قرار بود خانم **مریم پرور** حدس بهزاد را برایمان تعریف کند.

♦ **خانم معلم:** خب بچه‌ها، جلسه قبل من رنگ‌آمیزی گراف را برایتان گفتم و یکی از کاربردهای آن را هم دیدید. حالا برای آنکه ببینم چقدر از موضوع را یاد گرفته‌اید، مسئله‌ای را مطرح می‌کنم.

مسئله ۱: با گراف دوری C_n همه آشنا هستید. گرافی از مرتبه n که نمودار آن شبیه n ضلعی است. حال مسئله این است که عدد رنگی C_n چقدر است؟

بچه‌ها شروع کردند به شکل کشیدن.

♦ **پروانه:** خانم برای رنگ‌آمیزی C_3 ، سه رنگ لازم است. پس برای رنگ‌آمیزی C_n ، n رنگ لازم داریم.

♦ **معلم:** یک مقداری عجله کردی. C_4 را هم امتحان کن.

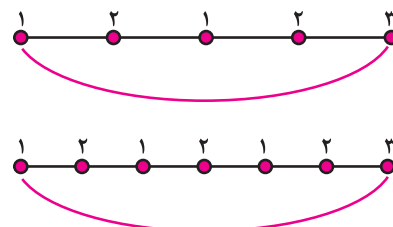
♦ **فاطمه:** خانم برای C_4 ، ۲ رنگ کافی است. می‌توانیم رأس‌ها را یکی در میان قرمز و آبی کنیم.

♦ **معلم:** بله درست است.

فاطمه ادامه داد: «این روش برای C_6 ، C_8 و... مناسب است، اما برای C_5 ، C_7 و... کار نمی‌کند. شاید لازم باشد روی زوج و فرد بودن n بحث کنیم.»

♦ **معلم:** بله کاملاً درست است. با توضیحاتی که فاطمه داد، اگر n زوج باشد، عدد رنگی C_n برابر است با ۲. اگر n فرد باشد، پاسخ قطعاً ۲ نیست.

♦ **مهسا:** فکر کنم برای n ‌های فرد، عدد رنگی C_n برابر ۳ باشد.



♦ **معلم:** خب، معلومه که موضوع برایتان جالب بوده. اما در ادامه موضوع رنگ‌آمیزی، می‌خواهم یک مسئله دیگر را برایتان مطرح کنم که با رنگ‌آمیزی گراف‌ها ارتباط پیدا می‌کند.

مسئله ۲: شش تیم از کشورهای متفاوت به ایران آمده‌اند تا در یک تورنمنت ورزشی با هم رقابت کنند. هر دو تیم یک مسابقه با یکدیگر برگزار خواهند کرد. چند مسابقه باید برگزار شود؟

♦ **سهیلا:** خانم انتخاب ۲ از ۶ که می‌شود ۱۵ تا.

♦ **معلم:** بله درست است. ۱۵ مسابقه باید برگزار شود. هدف این است که در کمترین زمان ممکن این کار انجام شود. برای همین، از چند سالن برای مسابقات استفاده می‌شود. سؤال اصلی این است که چند سالن برای برگزاری مسابقات لازم داریم و چند روز این مسابقات طول خواهد کشید؟

♦ **مهسا:** خانم مسئله جالبی است، اما چه ارتباطی به گراف دارد؟

♦ **فاطمه:** می‌توانیم تیم‌ها را با رأس‌ها و بازی‌ها را با یال نمایش بدهیم. چون هر دو تیم یک‌بار با هم مسابقه می‌دهند، پس گراف حاصل K_6 خواهد شد.

♦ **معلم:** آفرین فاطمه. حالا تعداد سالن‌ها و روزها را باید به کمک رنگ‌آمیزی به‌دست آوریم.

◆ **سعیده:** خانم چون ۶ تیم هستند، می‌توانیم هم‌زمان ۳ مسابقه در ۳ سالن برگزار کنیم. یعنی هر روز ۳ مسابقه. پس $\frac{15}{3} = 5$ روز برای برگزاری همه بازی‌ها لازم داریم.

◆ **معلم:** این استدلال شما نشان می‌دهد، حداقل ۵ روز لازم داریم. اما برای اطمینان از اینکه ۵ روز کافی است، باید مسابقات این ۵ روز را مشخص کنیم.

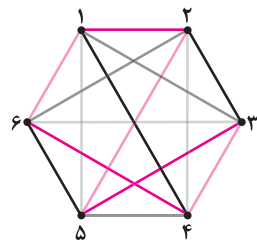
◆ **سهیلا:** خانم می‌توانیم ۳ بازی هر روز را که ۳ یال از گراف تیم‌هاست، با یک رنگ مشخص کنیم. یال‌های هم‌رنگ نباید مجاور باشند، چون یک تیم نمی‌تواند در یک زمان در دو سالن باشد!

◆ **معلم:** بله درست است. پس مسئله ما تبدیل شد به رنگ‌آمیزی یال‌های K_6 به طوری که یال‌های هم‌رنگ مجاور نباشند. تعداد روزها همان تعداد رنگ‌های به کار رفته خواهد بود. سعی کنید یک رنگ‌آمیزی یالی K_6 با ۵ رنگ پیدا کنید.

◆ **پروانه:** خانم ما یک جواب پیدا کردیم.

◆ **معلم:** آفرین دخترم. از ۵

رنگ استفاده شده و هیچ دو یال مجاوری هم‌رنگ نیستند. بچه‌ها این تعداد رنگ را عدد رنگی یالی گراف می‌نامیم. حالا یک مسئله دیگر.



◆ **مسئله ۳:** عدد رنگی یالی K_6 چقدر است؟

◆ **سهیلا:** خانم برای K_6 ، ۵ رنگ لازم بود. شاید برای K_6 جواب ۴ باشد.

◆ **معلم:** اگر به این سؤالی که می‌پرسم جواب بدهید، جواب را هم پیدا خواهید کرد. در یک روز چند مسابقه هم‌زمان می‌توانید برگزار کنید؟

◆ **سعیده:** خانم ۵ تیم داریم. پس حداکثر در یک زمان ۲ بازی می‌تواند برگزار شود و یک تیم هم استراحت می‌کند. نتیجه می‌شود از هر رنگ ۲ بار می‌توانیم استفاده کنیم.

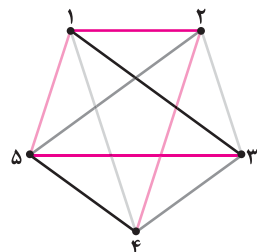
◆ **معلم:** بله درست است.

◆ **مهسا:** K_6 ۱۰ یال دارد.

پس $\frac{10}{2} = 5$ رنگ لازم داریم.

◆ **سهیلا:** خانم ما جواب را

پیدا کردیم.



◆ **معلم:** آفرین بچه‌ها! مسئله بعدی که می‌خواهم بگویم کلی است. **مسئله ۴:** اگر ماکزیمم درجه یک گراف k باشد، آن‌گاه عدد رنگی یالی از k کمتر نیست.

بچه‌ها کمی به فکر فرو می‌روند. آن‌ها می‌دانند که استدلالشان باید کلی باشد و محدود به گراف‌های خاصی که بررسی کردند، نباشد.

◆ **سهیلا:** خانم وقتی می‌گوییم ماکزیمم درجه گراف برابر است با k ، یعنی اینکه رأسی در گراف وجود دارد که k یال به آن رأس وصل هستند. این k یال دوبه‌دو مجاورند و در نتیجه رنگ آن‌ها باید متفاوت باشد. پس k رنگ متفاوت لازم داریم!

◆ **معلم:** بله. اثبات شما درست است. حال فکر می‌کنید k رنگ کافی هم باشد؟ به مثال‌ها رجوع کنید.

◆ **پروانه:** در K_5 ، عدد رنگی ۵ و ماکزیمم درجه هم ۵ است، اما در K_6 ، ماکزیمم درجه، ۴ و عدد رنگی ۵ بود. پس k رنگ همیشه کافی نیست.

◆ **معلم:** بچه‌ها قضیه جالبی که وجود دارد این است که عدد رنگی یالی هر گراف با ماکزیمم درجه k ، برابر است با $k+1$. این قضیه حدود ۵۰ سال است که اثبات شده است. حالا وقت آن است که «حدس بهزاد» را برایتان بگویم.

فرض کنید می‌خواهیم رأس‌ها و یال‌های گرافی با ماکزیمم درجه k را رنگ کنیم، به طوری که:

۱. هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند.
۲. هیچ دو یال مجاوری هم‌رنگ نباشند.
۳. رأس و یال مجاور هم ناهم‌رنگ باشند.

به راحتی می‌توان نشان داد (تمرین) که حداقل $k+1$ رنگ لازم است. اما مهدی بهزاد، ریاضی‌دان ایرانی، در سال ۱۹۶۵ حدس زد که $k+2$ رنگ برای چنین رنگ‌آمیزی که آن‌را رنگ‌آمیزی کلی گراف می‌نامند، کافی است.

◆ **فاطمه:** خانم، حدس بهزاد صورت ساده‌ای دارد، اما چرا هنوز نتوانسته‌اند آن‌را ثابت کنند؟

◆ **معلم:** حدس‌های زیادی در ریاضیات هستند که صورت ساده‌ای دارند، اما اثبات آن‌ها گاهی بعد از ۱۰۰ سال پیدا می‌شود. من بحث امروز را با یک تمرین به پایان می‌برم. سعی کنید حداقل تعداد رنگ‌ها برای رنگ‌آمیزی کلی گراف‌های C_n و K_n را به دست آورید.

*پی‌نوشت‌ها

۱. دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، دانش‌آموخته در رشته ریاضی در دانشگاه تهران و دانشگاه ایالتی میشیگان در آمریکا و استاد ریاضی دانشگاه‌های شیراز، صنعتی شریف و شهید بهشتی، ملقب به پدر گراف ایران و چهره ماندگار ریاضی ایران در سال ۱۳۸۲. ایشان از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان بین‌المللی معاصر ایران هستند.